ALGEBRA M2 - Lista dodatkowa 2

1. Niech $T \in L(\mathbb{R}^n, V)$, gdzie V jest pewną przestrzenią liniową nad $\mathbb{R}$, będzie zadane wzorem
$$T(a_1, \ldots, a_n) = a_1 v_1 + \ldots + a_n v_n$$
gdzie $v_1, \ldots, v_n \in V$. Pokazać, że $\mathrm{def}(T) = 0$ wtedy i tylko wtedy gdy $v_1, \ldots, v_n$ są liniowo niezależne.

2. Dla przekształceń $T, S \in L(V)$, gdzie V jest skończenie wymiarowa, wykazać, że
   (a) $\mathrm{rz}(T + S) \leq \mathrm{rz}(T) + \mathrm{rz}(S)$,
   (b) $\mathrm{def}(S \circ T) \leq \mathrm{def}(T) + \mathrm{def}(S)$,
   (c) $\mathrm{rz}(S \circ T) \leq \mathrm{rz}(T)$,
   (d) $\mathrm{rz}(S \circ T) \leq \mathrm{rz}(S)$.

3. Niech V, W będą przestrzeniami liniowymi nad tym samym ciałem i o tym samym wymiarze skończonym n. Pokazać, że $T \in L(V, W)$ jest suriekcją wtedy i tylko wtedy gdy $\mathrm{rz}(T) = n$. Pokazać także, że przy tych założeniach T jest iniekcją wtedy i tyko wtedy gdy T jest suriekcją.

4. Wykazać, że jeżeli $T \in L(V)$, gdzie $\mathrm{dim}V = n$, to rząd przekształcenia T jest równy rzędowi jego macierzy w dowolnej bazie.

5. Niech $T \in L(V)$ będzie przekształceniem odwracalnym o macierzy M w pewnej bazie B. Pokazać, że macierzą przekształcenia T^{-1} w bazie B jest M^{-1}.

6. Niech $B = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ będzie bazą w przestrzeni liniowej V. Wykazać, że zbiór funkcjonałów $B^* = \{T_1, T_2, \ldots, T_n\}$, gdzie T_i zadany jest następująco
$$T_i(e_j) = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$$
jest bazą przestrzeni V^* (jest to tzw. baza *sprzężona* lub *dualna* do bazy B). Wywnioskować, że $\mathrm{dim}V^* = n$.

7. Pokazać, że zbiór $L(V, W)$, gdzie V, W przestrzenie liniowe nad ciałem $\mathbb{K}$, wraz z operacją dodawania: $(T + S)(v) = T(v) + S(v)$ i mnożenia przez liczby z ciała $\mathbb{K}$: $(\alpha T)(v) = \alpha T(v)$, jest przestrzenią liniową nad ciałem $\mathbb{K}$.

8. Pokazać, że zbiór $L(V)$ przekształceń liniowych przestrzeni liniowej V w siebie, wraz z naturalnymi operacjami dodawania, składania oraz mnożenia przez liczby z ciała $\mathbb{K}$ jest algebrą nad ciałem $\mathbb{K}$. Zbiór A jest *algebrą nad ciałem* $\mathbb{K}$ jeżeli jest przestrzenią liniową nad tym ciałem, w której zdefiniowano operację "mnożenia": $A \times A \to A$, gdzie piszemy $(a, b) \to a \cdot b$, spełniającą dwa warunki rozdzielności mnożenia względem dodawania: $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$, $(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$ oraz warunek $\alpha(a \cdot b) = (\alpha a) \cdot = a \cdot (\alpha b)$, gdzie $a, b, c \in A$, $\alpha \in \mathbb{K}$). Co więcej, pokazać, że jest to algebra łączna, tzn. $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$, i posiada jedynkę $\mathbf{1}$, tzn. $\mathbf{1} \cdot a = a$, gdzie $a \in A$.

Romuald Lenczewski